ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα συστήματα :

$(\Sigma_1):\begin{cases}x+2y=1\\2x+4y=0\end{cases}\quad(\Sigma_2):\begin{cases}x+y=1\\x+2y=4\end{cases}\quad(\Sigma_3):\begin{cases}2x+4y=2\\x+2y=1\end{cases}\quad(\Sigma_4):\begin{cases}x-y=1\\x+\alpha^2y=1\end{cases}$

με εκείνη από τις απαντήσεις Α, Β, Γ που νομίζετε ότι είναι η σωστή.

Α) Έχει μοναδική λύση, **Β)** Είναι αδύνατο, **Γ)** Έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(Σ_1)	(Σ_2)	(Σ_3)	(Σ_4)
Β	Α	Γ	Α

Απάντηση:

► Στο (Σ_1) αν διαιρέσουμε με 2 τους όρους της δεύτερης εξίσωσης έχουμε:

$$(\Sigma_1):\begin{cases}x+2y=1\\2x+4y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=1\\x+2y=0\end{cases}$$

Αρα το σύστημα είναι αδύνατο αφού τα πρώτα μέλη είναι ίσα ενώ τα δεύτερα διαφορετικά.

► $(\Sigma_2):\begin{cases}x+y=1\\x+2y=4\end{cases}$

$D=\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

► Αν διαιρέσουμε την πρώτη εξίσωση του συστήματος Σ_3 με το 2 έχουμε:

$$(\Sigma_3):\begin{cases}2x+4y=2\\x+2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y=1\\x+2y=1\end{cases}$$

άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

► $D=\begin{vmatrix}1 & -1\\1 & \alpha^2\end{vmatrix}=\alpha^2+1>1$ για κάθε α, άρα $D\neq 0$ για κάθε α.

Αρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

<u>Σημείωση:</u> *Κάποιοι μαθητές είπαν ότι το σύστημα είναι αδύνατο αφού αποκλείεται οι συντελεστές του y στην πρώτη και δεύτερη εξίσωση να γίνουν ίσοι, αφού προφανώς δεν είναι δυνατόν για κανένα α να ισχύει* $\alpha^2=-1$.
Δεν ξέρω τι ακριβώς τους μπέρδεψε, αλλά τους εξήγησα ότι ακριβώς η παρατήρησή τους μας δίνει την απάντηση.Συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις αν τα πρώτα μέλη είναι ίσα και τα δεύτερα αντίστοιχα διαφορετικά ή ίσα.Εδώ τα πρώτα μέλη δεν μπορεί να είναι ίσα για κανένα ***α,*** *άρα έχουμε αναγκαστικά μοναδική λύση.*

ΙΙ. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1. Αν ένα γραμμικό σύστημα έχει δύο διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Απάντηση:

Αληθές.

Πράγματι γνωρίζουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα ή θα έχει μοναδική λύση ή θα είναι αδύνατο ή θα έχει άπειρες λύσεις.

Αφού μας δίνεται ότι έχει δύο διαφορετικές λύσεις αποκλείεται η περίπτωση να είναι αδύνατο καθώς και να έχει μοναδική λύση.

Αρα μένει η περίπτωση να έχει άπειρες λύσεις.

2. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα είναι $D = 0$, τότε το σύστημα είναι κατ' ανάγκη αδύνατο

Απάντηση

Ψευδές

Πράγματι αν D=0 το σύστημα δεν είναι κατ' ανάγκη αδύνατο.Μπορεί να έχει και άπειρες λύσεις.

3. Το σύστημα $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ είναι αδύνατο

Απάντηση: 1ος τρόπος (του μαθητή Ανδρέα Κ.)

Αληθές γιατί από την δεύτερη εξίσωση $x + y = 0$ συμπεραίνουμε ότι:

- $x=y=0$ οπότε $xy=0$ δηλαδή η πρώτη δεν επαληθεύεται για αυτές τις τιμές.

ή ότι:

- οι x και y είναι αντίθετοι άρα ετερόσημοι, οπότε το γινόμενό τους θα είναι αρνητικός δηλαδή ούτε για αυτούς τους αριθμούς επαληθεύεται η πρώτη εξίσωση.

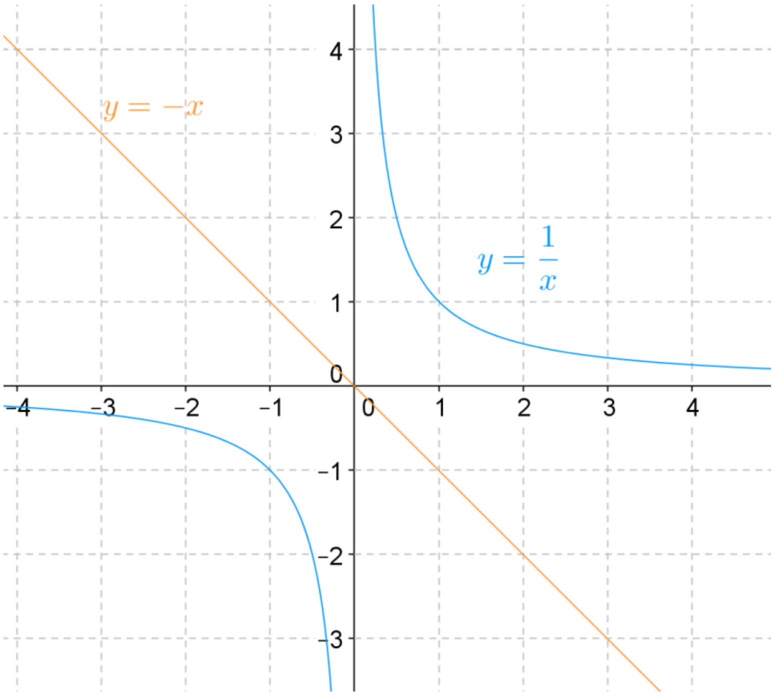
2ος τρόπος αλγεβρικά

Αρα το σύστημα είναι αδύνατο.

$$\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(-x) = 1 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 = 1 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -1 \text{ αδύνατη} \\ y = -x \end{cases}$$ άρα και το σύστημα αδύνατο.

3ος τρόπος γραφικά

Η πρώτη εξίσωση παριστάνει υπερβολή με δύο κλάδους στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο αντίστοιχα, ενώ η δεύτερη εξίσωση παριστάνει ευθεία την οποία μπορούμε να γράψουμε $y=-x$ και επειδή είναι της μορφής $y=\alpha x$ καταλαβαίνουμε ότι διέρχεται από την αρχή των αξόνων και επειδή ο συντελεστής του x είναι αρνητικός θα «κατεβαίνει».Συγκεκριμένα πρόκειται για την διχοτόμο του 2ου και 4ου τεταρτημορίου.
Υπερβολή και ευθεία δεν έχουν κοινό σημείο, άρα το σύστημα αδύνατο.



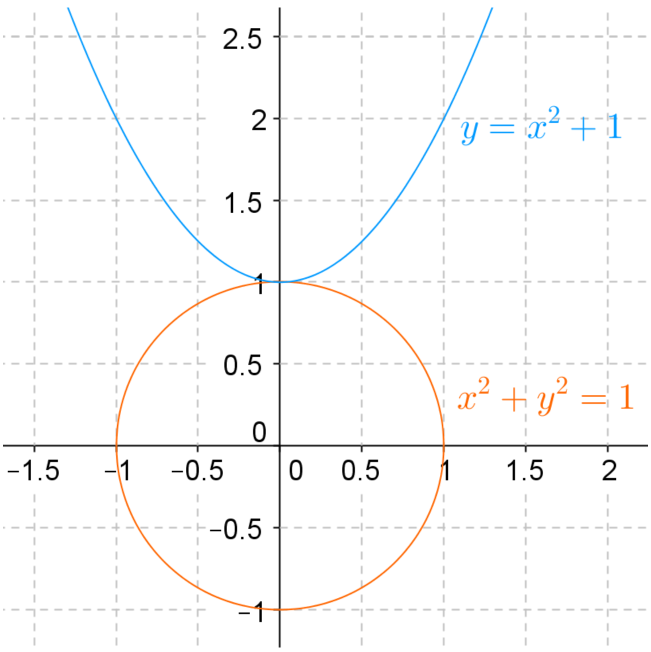
4. Ο κύκλος $x^2+y^2=1$ και η παραβολή $y=x^2+1$ δεν έχουν κοινά σημεία.

Απάντηση

Ψευδές.

Γραφικά το βρίσκουμε σκεπτόμενοι ότι ο κύκλος έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.Ενώ η παραβολή $y=x^2+1$ είναι ίδια στην μορφή με την παραβολή $y=x^2$ που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων μετατοπισμένη όμως προς τα πάνω κατά 1.Αρα έχουν ένα κοινό σημείο το (0,1).

Με το **Geogebra** σχεδιάσαμε και τις γραφικές παραστάσεις.



Αλγεβρικά, αν λύσουμε το σύστημα έχουμε:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=x^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-1+y^2=1 \\ x^2=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+y-2=0 & (1) \\ x^2=y-1 & (2) \end{cases}$$

Λύνουμε την (1) :

α=1

β=1

γ=-2

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=1-4\cdot1(-2)=1+8=9$$

$$y_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}$$

$$y_1=\frac{-1\pm3}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$y_2=\frac{-1+3}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε:

Για y_1= -2: $x^2=-2-1 \Leftrightarrow x^2=-3$ αδύνατη.

Για y_2= 1: $x^2=1-1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

Αρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος (0,1) που σημαίνει ότι ο κύκλος και η παραβολή έχουν ένα κοινό σημείο.

Αθανασίου Δημήτρης (Μαθηματικός) asepfreedom@yahoo.gr